Álgebra: Ecuaciones no algebraicas

Matemáticas I

1.º Bachillerato

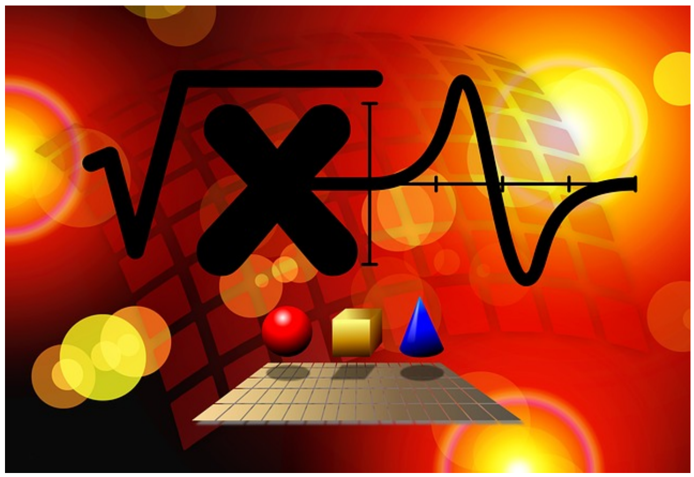
Contenidos

Álgebra

Ecuaciones no algebraicas

1. Ecuaciones irracionales

En el tema anterior se han visto ecuaciones cuyos términos estaban relacionados entre si por alguna de las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). En este apartado vamos a ver aquellas ecuaciones que presentan, aparte de las operaciones mencionadas anteriormente, la incógnita elevada a un exponente fraccionario.



Fotografía de geralt en Pixabay. Licencia Pixabay

Importante

Se dice que una ecuación es irracional cuando la incógnita figura dentro de algún radical.

En este apartado solo veremos casos en que los radicales son cuadráticos. Este tipo de ecuaciones se resuelven de la siguiente forma:

1. Se despeja una de las raíces.
2. Se eleva al cuadrado ambos miembros.

Los pasos 1. y 2. se repiten tantas veces como haga falta, hasta obtener una ecuación que no sea irracional. Resuelta ésta, es imprescindible comprobar los resultados obtenidos , pues al elevar al cuadrado los miembros de una ecuacion, pueden introducirse soluciones extrañas.

Como muestra de lo que puede suceder si los dos miembros de una ecuación son elevados al cuadrado, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

x-1=2

Esta ecuación tiene una única solución: x=3.
Elevando al cuadrado sus miembros:

$$(x-1)^2=2^2$$
$$x^2-2x+1=4$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}\rightarrow \begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{matrix}$$

Hemos introducido la solución extraña x=-1. La razón estriba en que también al elevar al cuadrado los miembros de la ecuación x-1=-2 (cuya única solución es x=-1) se obtiene, después de simplificar, $x^2-2x-3=0$.

Ejemplo 2

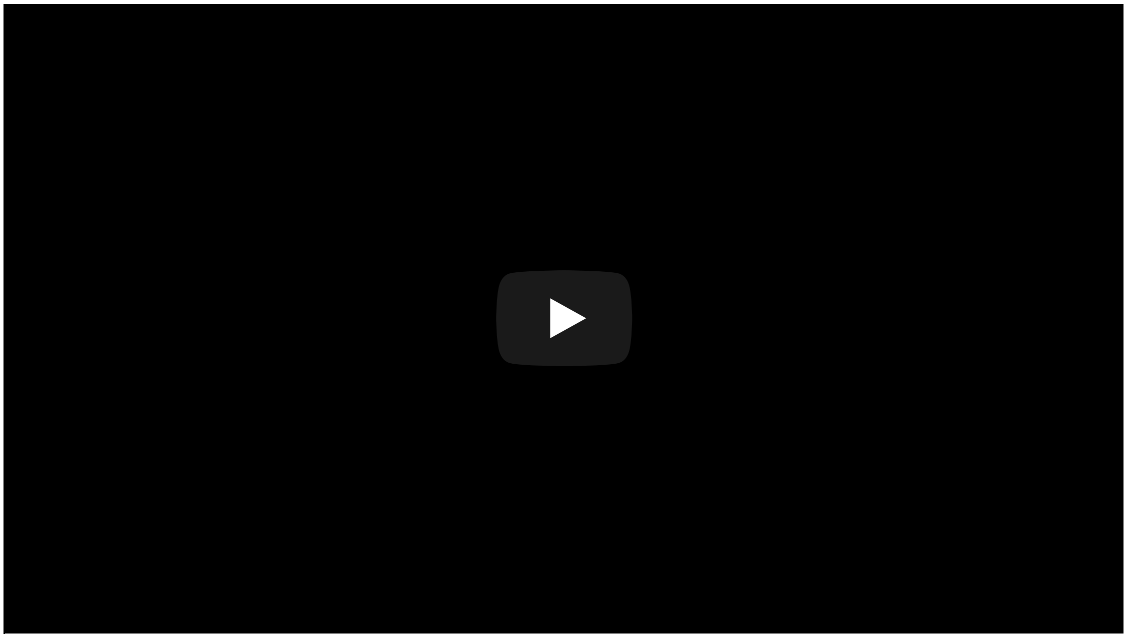
x-3=0

Esta ecuación tiene una única solución: x=3.
Elevando al cuadrado sus miembros:

$$(x-3)^2=0$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3$$

Esta vez no se ha introducido ninguna solución extraña.

En el siguiente vídeo puedes ver la forma de resolver una ecuación irracional:



Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Ejercicio Resuelto

Resolver la ecuación $x+\sqrt{x}-6=0$.

$x+\sqrt{x}-6=0$

Despejamos $\sqrt{x}$ y a continuación elevamos ambos miembros al cuadrado.

$\sqrt{x}=6-x$
$(\sqrt{x})^2=(6-x)^2$
$x=36-12x+x^2$

Simplificando la última ecuación, resulta: $x^2-13x+36=0$cuyas raíces son $x_1=9$ y $x_2=4$.

Comprobemos los resultados:
$x_1=9$
$9+\sqrt{9}-6=6$

Luego $x_1=9$ no es solución de la ecuación.

$x_2=4$
$4+\sqrt{4}-6=0$

Luego $x_1 = 4$ es solución de la ecuación.

Ejercicio Resuelto

Resuelve la ecuación y comprueba las soluciones: $x + \sqrt{x-4} = 24$.

$x + \sqrt{x-4} = 24$
$(\sqrt{x-4})^2 = (24-x)^2$
$x - 4 = x^2 - 48x + 576$
$x^2 - 49x + 580 = 0$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado de arriba son:

$x_1 = 29,\ x_2 = 20$

Comprobamos ambas soluciones:

$x_1 = 29$
$29 + \sqrt{29-4} \neq 24$
$x_2 = 20$
$20 + \sqrt{20-4} = 24$

Solución $x_2 = 20$

Ejercicio Resuelto

Resolver la ecuación: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$.

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$

Despejamos $\sqrt{2x+3}$ y a continuación elevamos ambos miembros al cuadrado.

$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{x-2}$
$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2$
$2x+3=4+4\sqrt{x-2}+x-2$
$x+1=4\sqrt{x-2}$

Volvemos a elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad de arriba.

$4\sqrt{x-2}=x+1$
$\left(4\sqrt{x-2}\right)^2=(x+1)^2$
$16(x-2)=x^2+2x+1$

Simplifacando la última ecuación resulta: $x^2-14x+33=0$ cuyas raíces son $x_1=11$ y $x_2=3$.

Comprobemos los resultados.
$x_1=11$
$\sqrt{2\cdot 11+3}-\sqrt{11-2}=2$
Luego $x_1=11$ es solución de la ecuación.
$x_2=3$
$\sqrt{2\cdot 3+3}-\sqrt{3-2}=2$
Luego x_2 es solución de la ecuación.

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x_1=11$ y $x_2=3$.

2. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para la resolución de las ecuaciones tanto exponenciales como logarítmicas es básico recordar las propiedades de las potencias y de los logaritmos.

Imagen en Wikimedia Commons. Dominio Público

Importante

Las principales propiedades de las potencias son:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n \div b^n = (a \div b)^n$$

Recuerda la definición de logaritmo

$$\boxed{\log_a N = b \iff a^b = N;\ \text{siendo } a>0,\ a\neq 1 \text{ y } N>0}$$

y sus principales propiedades

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N \\ \log_a (M \div N) = \log_a M - \log_a N \\ \log_a M^n = n \cdot \log_a M \end{array}}$$

Para resolver las ecuaciones logarítmicas también hay que tener en cuenta:

$$\boxed{\log_a N = \log_a M \iff N = M}$$

2.1. Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas tienen múltiples aplicaciones en todos los campos de la ciencia y la técnica. Habitualmente surgen cuando hay que despejar el exponente de una expresión algebraica.

Imagen en Wikimedia Commons. Dominio Público

Importante

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece en el argumento o en la base del logaritmo.

Para resolverlas habrá que aplicar la definición y las propiedades de los logarítmos y pasarla a una expresión algebraica.

Cuando resolvemos esta ecuación hay que comprobar si las soluciones obtenidas sirven en la ecuación logarítmica ya que la base de un logaritmo puede ser cualquier número positivo menos el 1 y el argumeto tiene que ser un número positivo.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

$$\log_x 16 = 4$$

Para resolver esta ecuación tan sólo hay que aplicar la definición de logaritmo y nos queda: $x^4=16 \Rightarrow x=\sqrt[4]{16}=2$.

Podríamos pensar que -2 también es solución de la ecuación algebraica pero hay que recordar que la base de un logaritmo no puede ser un número negativo.

Ejemplo 2

$$2\log(x-1)-\log(2x-3)=\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

Primero aplicamos las propiedades de los logaritmos hasta quedarnos a ambos lados de la igualdad con un sólo logaritmo:

$$\log\left[(x-1)^2\right]-\log(2x-3)=\log\left(\frac{2x-1}{3}\right) \Rightarrow \log\left[\frac{(x-1)^2}{2x-3}\right]=\log\left(\frac{2x-1}{3}\right)$$

De esta forma, los argumentos son iguales por lo que queda la ecuación:

Las soluciones de esta ecuación son x=0 y x=2. x=0 no puede ser solución de la ecuación logarítmica porque cuando sustituimos en la expresión log(x-1) el argumento saldría negativo, x=2 no da problemas en ninguno de los tres logarítmos, por tanto la solución de la ecuación es x=2.

Ejemplo 3

$$\ln(x+2)+\ln(x-2)=2\ln 2+\ln 3+\ln(x-3)$$

Primero hay que indicar que la base del logaritmo no influye en la resolución de la ecuación, por tanto comenzamos aplicando las propiedades de los logaritmos para agruparlos a ambos lados de la igualdad:

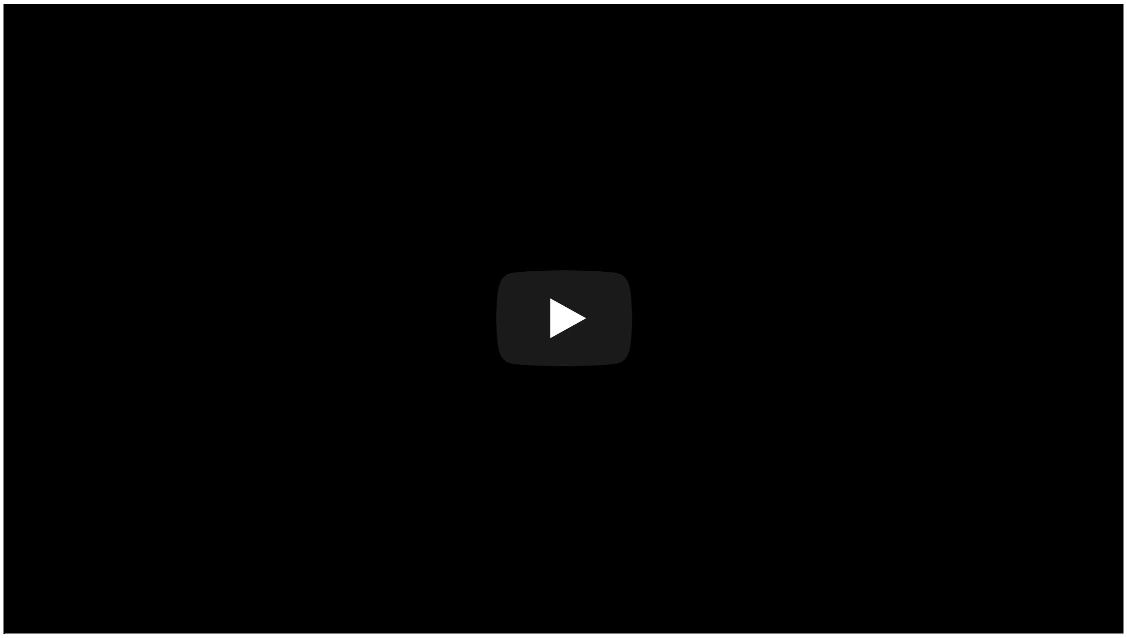
$$\begin{aligned}&\ln\left[(x+2)\cdot(x-2)\right]=\ln(2^2)+\ln(3\cdot(x-3)) \Rightarrow\\ &\Rightarrow \ln(x^2-4)=\ln\left[4\cdot(3x-9)\right] \Rightarrow\\ &\Rightarrow \ln(x^2-4)=\ln(12x-36)\end{aligned}$$

Igualamos los argumentos y resolvelmos la ecuación resultante:

$$x^2-4=12x-36 \Rightarrow x^2-12x+32=0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1=4$ y $x_2=8$. Ambas soluciones son válidas para la ecuación logarítmica de partida.

En este vídeo puedes ver otro ejemplo:



Vídeo de lasmatematicas.es alojado en Youtube

Comprueba lo aprendido

Resuelve e indica la solución de la siguiente ecuación: $2\log x=\log(-12x-16)-\log 2$

- $x=-2$
- No tiene solución
- $x=-4$
- $x=3$

Comprueba en la ecuación de partida.

Correcto. Tanto -2 como -4 son soluciones de la ecuación algebraica pero al sustituirlas en logx dejan el argumento negativo.

Comprueba en la ecuación de partida

Revisa tus cálculos.

Solución

1. Incorrecto

2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Señala la solución de la siguiente ecuación: $2\ln(x-3)=\ln x+\ln(4x-20)-2\ln 2$

- x=-9
- x=4
- x=9
- No tiene solución.

Revisa los signos.

Repasa los cálculos

Correcto

Vuelve a comprobarlo.

Solución

1. Incorrecto
2. Incorrecto
3. Opción correcta
4. Incorrecto

Ejercicio Resuelto

Resuelve:

$$\frac{1}{2}\log(x-1)=\log(x-3)$$

Si empezamos a aplicar las propiedades de los logaritmos tendríamos que introducir la fracción como exponente en el primer logaritmo y después resolver una ecuación con radicales, es más sencillo si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por 2 y desaparece el problema de la fracción:

$$\log(x-1)=2\log(x-3) \Rightarrow \log(x-1)=\log\left[(x-3)^2\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1=(x-3)^2 \Rightarrow x-1=x^2-6x+9 \Rightarrow 0=x^2-7x+10$$

Ecuación de segundo grado cuyas soluciones son: $x_1=2$, $x_2=5$.

En este caso, solo una de las soluciones ($x_2=5$) es también solución de la ecuación logarítmica porque al sustituirla en los logaritmos sus argumento quedan positivos.

La solución $x_1=2$ debemos desecharla por que al sustituirla en log(x-3), el argumento sale negativo.

Ejercicio Resuelto

Calcule todas las soluciones de la ecuación $2logx-log(x-16)=2$ donde $logx$ representa el logaritmo en base 10 de x

$2\log_{10} x - \log_{10}(x-16) = 2$

$\log_{10} x^2 - \log_{10}(x-16) = 2$

$\log_{10} \dfrac{x^2}{x-16} = 2$

$\dfrac{x^2}{x-16} = 10^2$

$x^2 - 100x + 1600 = 0$, Soluciones : $80, 20$

Comprobamos ambas soluciones:

$x_1 = 80$

$2\log_{10} 80 - \log_{10}(80-16) = 2$

$x_2 = 20$

$2\log_{10} 20 - \log_{10}(20-16) = 2$

Las soluciones $80, 20$ son válidas.

2.2. Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones exponenciales suelen surgir en áreas de la ciencia relacionadas con la ecología y medio ambiente. Las mismas nos ayudan a entender mejor el mundo en el que nos movemos.

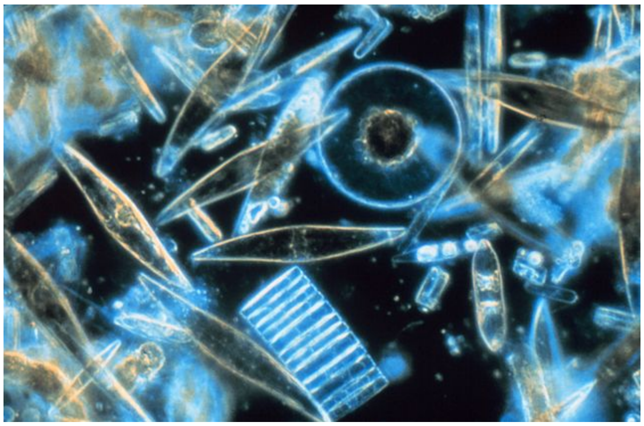


Imagen en Wikimedia Commons. Dominio Público

Imagen en Wikimedia Commons. Dominio Público

Importante

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente.

Para resolverlas se aplican las propiedades de las potencias o un cambio de variable hasta llegar a una ecuación de la forma $a^x=b$. Esta se resolverá bien directamente (si b se puede poner como una potencia de base a, igualando los exponentes), bien tomando logaritmos.

Veamos distintos tipos de ecuaciones exponenciales y ejemplos de como resolverlas:

- El tipo más sencillo es de la forma $a^x=b$ donde a y b se pueden poner como potencias con la misma base, por ejemplo:

$$2^x=512 \Rightarrow 2^x=2^9 \Rightarrow x=9$$

- No tan evidente resulta cuando en la ecuación $a^x=b$ a y b no se pueden poner como potencias de la misma base. En este caso aplicamos la definición de logaritmo como mostramos en el ejemplo siguiente:

  $3^x=25$ Aplicando la definición de logaritmo quedaría que $x=\log_3 25$

- Si la expresión exponencial va acompañada de un factor de la forma: $c\cdot a^x=b$ despejamos $a^x=b/c$ y resolvemos la ecuación resultante como alguno de los casos anteriores. Por ejemplo:

$$5\cdot 4^x=80 \Rightarrow 4^x=\frac{80}{5} \Rightarrow 4^x=16 \Rightarrow 4^x=4^2 \Rightarrow x=2$$

Por último veamos una un poco más compleja:

$$\left(2^{x+5}\right)^x=\frac{1}{2^6} \Rightarrow 2^{(x+5)\cdot x}=2^{-6} \Rightarrow 2^{x^2+5x}=2^{-6} \Rightarrow x^2+5x=-6 \Rightarrow x^2+5x+6=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=-3$$

Ejercicio Resuelto

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4\cdot 3^{7x-12}=36$

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1}$

c) $\dfrac{3^{x^3+16}}{81^{x^2+x}}=1$

a)

$$4\cdot 3^{7x-12}=36 \Rightarrow 3^{7x-12}=\frac{36}{4} \Rightarrow 3^{7x-12}=9 \Rightarrow 3^{7x-12}=3^2 \Rightarrow 7x-12=2 \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2$$

b)

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{2x-1} \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-9}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2x+1} \Rightarrow 3x-9=-2x+1 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=2$$

c)

$$\frac{3^{x^3+16}}{81^{x^2+x}}=1 \Rightarrow \frac{3^{x^3+16}}{(3^4)^{x^2+x}}=3^0 \Rightarrow \frac{3^{x^3+16}}{3^{4x^2+4x}}=3^0 \Rightarrow 3^{x^3-4x^2-4x+16}=3^0 \Rightarrow x^3-4x^2-4x+16=0$$

Por tanto, la ecuación resultante es una ecuación polinómica de tercer grado que se resuelve aplicando la regla de Ruffini y da como soluciones $x_1=2$, $x_2=-2$ y $x_3=4$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1

Cuando en la ecuación aparecen varios términos exponenciales sumando o restando tenemos que recurrir al cambio de variable. Para ver más claro este tipo de ecuación resolvamos algunos ejemplos:

$$3^{x+2}+5 \cdot 3^{x+1}=9 \cdot 3^{x-1}+7$$

Primero trabajamos con las propiedades de las potencias para que la única expresión exponencial que aparezca sea 3^x :

$$3^x \cdot 3^2+5 \cdot 3^x \cdot 3=9 \cdot \frac{3^x}{3^1}+7 \;\Rightarrow\; 9 \cdot 3^x+15 \cdot 3^x=3 \cdot 3^x+7$$

Para que resulte más sencillo trabajar con la anterior expresión hacemos el cambio de variable $t=3^x$, de manera que la expresión quedaría:

$$9t+15t=3t+7$$

Que no es más que una ecuación polinómica de primer grado muy sencilla de resolver:

$$21t=7 \;\Rightarrow\; t=\frac{7}{21} \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; t=3^{-1}$$

Una vez resuelta, se deshace el cambio de variable y calculamos el valor de x:

$$3^x=3^{-1} \;\Rightarrow\; x=-1$$

Ejemplo 2

$$25^x+5=30 \cdot 5^{x-1}$$

Trabajamos igual que con la ecuación anterior, aunque en este caso hay que tener en cuenta que las exponenciales no tienen la misma base. Lo que hacemos es sustituir 25 por 5^2 y dejar todo en función de 5^x :

$$(5^2)^x+5=30\cdot\frac{5^x}{5}\Rightarrow(5^x)^2+5=6\cdot5^x$$

Hacemos el cambio de variable t=5^x y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante:

$$t^2+5=6t\Rightarrow t^2-6t+5=0\Rightarrow t_1=1;\ t_2=5$$

Deshaciendo el cambio quedaría:

$$5^x=1\Rightarrow5^x=5^0\Rightarrow x=0;\ 5^x=5\Rightarrow5^x=5^1\Rightarrow x=1$$

Comprueba lo aprendido

Indica la solución de la siguiente ecuación: $2^{x+1}+5\cdot2^{x+2}=2^{x-1}+43$

- [ ] x=1
- [ ] x=2
- [ ] x=0
- [ ] x=-1

Solución

1. Correcto
2. Incorrecto
3. Incorrecto
4. Incorrecto

Señala las soluciones de la siguiente ecuación: $3^{x+1}+9^x-12=2\cdot3^{2x}-3^{x+2}+15$

- [ ] x=0
- [ ] x=1
- [ ] x=2
- [ ] x=3

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto

También podemos aplicar las propiedades de los logaritmos, vistas anteriormente, para resolver algunas ecuaciones exponenciales .

Ejercicio Resuelto

Resuelve la ecuación $e^{3x+2}=5$

Parece lógico usar el logaritmo de la misma base que la de la potencia para poder despejar la incógnita.

$$e^{3x+2}=5$$
$$ln(e^{3x+2})=ln(5)$$
$$3x+2=ln(5)$$
$$x=\frac{ln(5)-2}{3}$$

Ejercicio Resuelto

Resuelve la ecuación $2^{3x+1}=5^{x+7}$

En este caso tomaríamos logaritmos en ambos términos. Como base del logaritmo elegimos una de las bases de las potencias.

$$\log_2(2^{3x+1}) = \log_2(5^{x+7})$$
$$3x+1 = (x+7)\log_2(5)$$
$$3x+1 = x\log_2(5) + 7\log_2(5)$$
$$3x - x\log_2(5) = -1 + 7\log_2(5)$$
$$x(3 - \log_2(5)) = -1 + 7\log_2(5)$$
$$x = \frac{-1+7\log_2(5)}{3-\log_2(5)}$$

Resumen

Importante

Se dice que una ecuación es irracional cuando la incógnita figura dentro de algún radical.

Importante

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas en las que la incógnita aparece en el argumento o en la base del logaritmo.

Para resolverlas hacemos uso de las siguientes propiedades de los logarítmos:

Recuerda la definición de logaritmo

$$\boxed{\log_a N = b \Leftrightarrow a^b = N;\ \text{siendo } a>0,\ a\neq 1 \text{ y } N>0}$$

y sus principales propiedades

1. $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

1. $\log_a (M \div N) = \log_a M - \log_a N$

1. $\log_a M^n = n \cdot \log_a M$

Para resolver las ecuaciones logarítmicas también hay que tener en cuenta:

$$\boxed{\log_a N = \log_a M \Leftrightarrow N = M}$$

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita aparece en el exponente,

Es importante recordar las propiedades de las potencias, porque las vamos a utilizar en la resolución de ecuaciones:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $a^n \div a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $a^n \div b^n = (a \div b)^n$

Imprimible

Descarga aquí la versión imprimible de este tema.

Si quieres escuchar el contenido de este archivo, puedes instalar en tu ordenador el lector de pantalla libre y gratuito NDVA.

Aviso legal

Las páginas externas no se muestran en la versión imprimible

Aviso Legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación y Deporte (en adelante Consejería de Educación y Deporte**).

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación y Deporte se reserva el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y